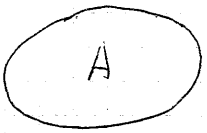
Elementi di Teorea della Probabilità

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Introduciamo i diagrammi di Eulero-Venn, per la rappresentazione grafica degli insiemi, in questo modo si disegna l'insieme A



che sarà costituito dall'insieme degli elementi ad esempio $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ o può essere definito anche in questo modo $A = \{0 \leq x \leq 1\}$. Ogni insieme ha una certa dimensione ad esempio:

- Finita, ossia quegli insiemi costituiti da un numero finito di elementi
- Infinita, che può essere di due tipi, numerabile quando è possibile avere una corrispondenza degli elementi dell'insieme e i numeri interi, non numerabile quando si ha una corrispondenza degli insiemi con i numeri reali

Due insiemi A e B si dicono uguali se tutti gli elementi di A sono uguali a tutti gli elementi di B, ad esempio se prendiamo

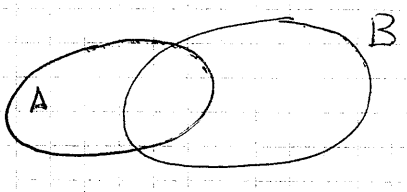
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$A = \{1, 3, 7\}$

$B = \{1, 3, 9\}$

è evidente che questi due insiemi non sono uguali

Definiamo con il termine Unione o somma di due insiemi $A \cup B$ l'insieme in cui sono contenuti tutti gli elementi di A e di B presi una sola volta,

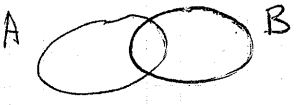


$A = \{1, 3, 7\}$

$B = \{1, 3, 9\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{1, 3, 7, 9\}$

Intersezione, che si indica come $A \cap B$



$A = \{1, 3, 7\}$

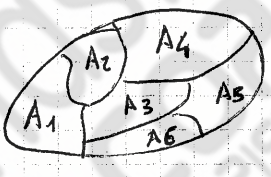
$B = \{1, 3, 9\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

L'intersezione è costituita da tutti gli elementi comuni fra i 2 insiemi presi una sola volta

Insieme Vuoto, si indica come ϕ ed è costituito dall'insieme in cui non sono contenuti elementi

Partizione, una partizione, si tratta di avere diversi sottoinsieme disgiunti fra di loro la cui somma da l'insieme Ω, detto spazio campione



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SOTTOINSIEME

Si dice che $A \subset B$ quando tutti gli elementi di A appartengano a B. La scrittura inversa, $B \supset A$ vuol dire B include A.

Introduzione degli Eventi

Ogni qual volta si devono compiere misurazioni per controllare il verificarsi di certi avvenimenti, è necessario effettuare un esperimento. La definizione di esperimento che possiamo dare è appunto quella di una prova pratica intesa alla verifica di una certa ipotesi di lavoro. Supponiamo che si desideri studiare il lancio di un dado, sappiamo che il nostro spazio campione di tutti i valori possibili sarà le facce del dado quindi,

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ detto anche evento certo

Un evento è un insieme costituita da un certo numero di valori, possiamo ad esempio definire l'evento A come,

$A = \{$ facce pari $\}$

questo evento sarà costituito da $\{2, 4, 6\}$ che sono gli unici casi possibili del nostro dado, quindi diremo che l'evento si è verificato se si presenta una di queste facce.

Modello di probabilità

Introduciamo ora il concetto di, "frequenza relativa", riprendiamo l'esempio del dado e ne vogliamo calcolare quante volte esce il numero 1, per fare questo si usa una formulina molto semplice, in cui con A definiamo il nostro esperimento.

$$f(A) = \frac{m_A}{m}$$

in cui m_A rappresenta il n. di tentativi in cui il nostro esperimento ha avuto successo, nel nostro caso la faccia 1 si è verificata, ed m sono il numero di tentativi totali. La

$$f(A) > 0 \quad \text{ed è compreso} \quad 0 \leq f(A) \leq 1$$

si ha 1 come massimo valore quando tutte le volte che effettuo l'esperimento esso è verificato, pertanto il rapporto fa 1, sarà nullo se non ha mai avuto successo. ~~allora~~ Ma se calcoliamo la $f(\Omega)$ sarà,

$$f(\Omega) = 1$$

Infatti Ω comprende tutti i valori possibili, è ovvio che tutte le volte che si effettua l'esperimento ha successo, nel caso opposto si ha

$$f(\phi) = 0$$

In quanto non si verifica mai l'esperimento.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Un altra proprietá della frequenza relativa, in cui A e B sono disgiunti é,

$$f(A+B) = f(A) + f(B) = \frac{n(A+B)}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n}$$

per esempio $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$, questa indica la presentazione dei 2 insiemi ossia $\{1,3,3,4\}$, quindi n_{A+B} indica il numero di volte in cui nel nostro esperimento si presentano $\{1,2,3,4\}$, ed essendo A e B disgiunti quindi le due probabilitá possono essere calcolate separatamente in quanto o si verifica uno o si verifica l'altro. Ed ora passiamo allo studio della probabilitá, che é definita come,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

In realtá sono possibili tante definizioni di probabilitá, quella piú comunemente utilizzata é questa.

Assiomi:

1) La probabilitá di un evento arbitrario A é non negativa:

$$P_R(A) \geq 0$$

2) La probabilitá dell'evento certo é unitaria (assioma di normalizzazione)

$$P_R(\Omega) = 1$$

3) dati due eventi A e B disgiunti la probabilitá dell'evento unione é data dalla somma delle probabilitá di A e B:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow P_R(A+B) = P_R(A) + P_R(B)$$

dati questi assiomi si possono poi ricavare alcune proprietá,

- $0 \leq P_R(A) \leq 1$

Dato un evento A, la probabilitá dell'evento complementare $\bar{A}$ é data

dal complemento a uno di $Pr(A)$

$$Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$$

quindi

$$A \cdot \bar{A} = \Omega = 1$$

Vediamo di capire meglio attraverso un esempio, supponiamo di avere una monetina, dunque il nostro spazio campione sarà,

$$\Omega = (\text{testa}, \text{croce})$$

la probabilità che esca testa è

$$Pr(\text{testa}) = \frac{1}{2}$$

la probabilità che esca croce essendo il complementare di testa sarà

$$Pr(\text{croce}) = 1 - Pr(\text{testa}) = \frac{1}{2}$$

Prendiamo ora come esempio il dado, in cui $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, definiamo

$A = \{$ facce pari $\}$, $B = \{$ facce dispari $\}$, $C = \{$ facce $\geq 5\}$

ne vogliamo calcolare la probabilità dei 3 event, dunque definita con A_i la faccia i-esima del dado, la $P(A_i) = 1/6$, allora possiamo calcolare la Probabilità di A che sarà

$$P(A) = P(a_2, a_4, a_6) = P(a_2) + P(a_4) + P(a_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(a_1, a_3, a_5) = P(a_1) + P(a_3) + P(a_5) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(a_5, a_6) = P(a_5) + P(a_6) = \frac{1}{3}$$